Série 11 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Produit scalaire, orthogonalité*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}, \quad \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\|}, \quad \frac{1}{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}}\overrightarrow{w}, \quad \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}.$$

c) Calculer la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Sol.:

a) $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{x} = 0$.

b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 7$, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 10$, $\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{39}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}}\overrightarrow{w} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v} = \frac{39}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \sqrt{17}$, $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}\| = 3$.

d) $\tilde{\vec{u}} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\vec{w}} = \frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

Sol.: $W = \left\{ \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 3a + 2b + c = 0 \right\}$.

W est en fait le noyau de l'application linéaire $\vec{w} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et donc c'est un espace vectoriel. Cette application est non nulle (par exemple $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$) donc de rang 1. Par le théorème du rang, la dimension de W est donc $3 - 1 = 2$, il s'agit d'un plan (appelé le plan orthogonal au vecteur $\vec{v}$).

Exercice 3

Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.
b) Calculer la projection orthogonale $\vec{p}_W(\vec{v})$ de $\vec{v}$ sur $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.
c) Donner la décomposition $\vec{v} = \vec{z} + \vec{p}_W(\vec{v})$, où $\vec{z} \in W^\perp$.

Même question pour $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Même question pour $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) Un calcul direct donne $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.
b)

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \frac{6}{3}\vec{u}_1 + \frac{-3}{2}\vec{u}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\vec{v} = \vec{z} + \vec{p}_W(\vec{v})$, où $\vec{p}_W(\vec{v})$ est calculé dans b), et $\vec{z}$ est donné par $\vec{z} = \vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut vérifier que $\overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{z} \in W^{\perp}$.

Même question pour $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{u}_3 = 0$.

b)

$$\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\overrightarrow{u}_1 + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2}{\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{u}_2}\overrightarrow{u}_2 + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_3}{\overrightarrow{u}_3 \cdot \overrightarrow{u}_3}\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}_1 + 2\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v})$ équivaut à $\overrightarrow{v} \in W$.

Même question pour $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0$.

b)

$$\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\overrightarrow{u}_1 + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2}{\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{u}_2}\overrightarrow{u}_2 = \frac{2}{7}\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}.$$

c) $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ et $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\overrightarrow{u}_1 \ldots \overrightarrow{u}_n)$ et $V = (\overrightarrow{v}_1 \ldots \overrightarrow{v}_n)$. Montrer que $U^TU = I_n$, $V^TV = I_n$ et que UVest inversible.

Sol.:

$$U^TU = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u}_1^T \\ \overrightarrow{u}_2^T \\ \vdots \\ \overrightarrow{u}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u}_1 & \overrightarrow{u}_2 & \cdots & \overrightarrow{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u}_1^T\overrightarrow{u}_1 & \overrightarrow{u}_1^T\overrightarrow{u}_2 & \cdots & \overrightarrow{u}_1^T\overrightarrow{u}_n \\ \overrightarrow{u}_2^T\overrightarrow{u}_1 & \overrightarrow{u}_2^T\overrightarrow{u}_2 & \cdots & \overrightarrow{u}_2^T\overrightarrow{u}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overrightarrow{u}_n^T\overrightarrow{u}_1 & \overrightarrow{u}_n^T\overrightarrow{u}_2 & \cdots & \overrightarrow{u}_n^T\overrightarrow{u}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Comme $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vérifient les mêmes hypothèses, on a également $V^T V = I_n$.
UVest inversible car $V^T U^T U V = V^T V = I_n$, d'où $(UV)^{-1} = V^T U^T$.

Exercice 5

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivantes.

L'exercice ne vous demande que de calculer une base orthogonale (pas nécessairement orthonormée) et c'est aussi que ce que le solutionnaire vous propose. Vous pouvez bien sur calculer une base orthonormée (car elle est orthogonale en particulier). Ceci a l'avantage d'également révéler la factorisation QR comme vu en classe.

a) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Sol.:

a) La méthode de Gram-Schmidt donne $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

b) La méthode de Gram-Schmidt donne $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

c) Pour a) : $\vec{u}_1/\|\vec{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2/\|\vec{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour b) : $\vec{u}_1/\|\vec{u}_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2/\|\vec{u}_2\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3/\|\vec{u}_3\| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 6

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 4\\1 & 1\end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 2\\0 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

Sol.:

a) On applique la méthode de Gram-Schmidt aux vecteurs $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$, puis on les normalise. On obtient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$, d'où $Q = \begin{pmatrix}2/3 & -1/3\\2/3 & 2/3\\1/3 & -2/3\end{pmatrix}$, et $R = Q^T A = \begin{pmatrix}3 & 5\\0 & 1\end{pmatrix}$.

b) $Q = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}\sqrt{3} & 5/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\\0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

c) $Q = \begin{pmatrix}0 & 0\\1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22}\\0 & -2/\sqrt{22}\\-1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22}\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\0 & \sqrt{11/2}\end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$.

1. Calculer et décrire $W^\perp$.
2. Vérifier que $\dim(W) + \dim(W^{\perp)} = 4$.

Sol.: Comme vu au cours, un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ appartient à $W^\perp$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}_1$ et $\vec{v} \perp \vec{v}_2$. On peut donc écrire

$$W^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \vec{v}\cdot\vec{v}_1 = 0,\ \vec{v}\cdot\vec{v}_2 = 0\}.$$

En posant $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, les deux conditions impliquent que les $\overrightarrow{v} \in W^{\perp}$ sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$-x_1 + x_3 + 2x_4 = 0$$

On résout ce système pour trouver

$$W^{\perp} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3, x_4 \text{ libres} \right\}$$

Comme $\dim(W) = 2$ (car engendré par deux vecteurs indépendants) et $\dim(W^{\perp})$ (car engendré par deux vecteurs indépendants), on a $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = 4$. On conclut que dans $\mathbb{R}^4$, l'espace orthogonal à un plan est aussi un plan (alors que dans $\mathbb{R}^3$, l'espace orthogonal à un plan est une droite).

Exercice 8

Soit $\text{proj}_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur le sous-espace W de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\,. \end{cases}$$

1. Donner la matrice associée à cette projection.
2. Soit A le point dont les coordonnées sont $(3, 11, -1)$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de A sur W.

Sol.: On remarque que W est une droite dirigée par

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v})$ est une base de W, et $\mathcal{B}' = (\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|})$ est une base orthonormée de W. Comme vu au cours, la projection $\text{proj}\, W$ est donc représentée par la matrice

$$UU^T = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

En identifiant le point A avec l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient sa projection en calculant

$$UU^T\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34/9 \\ 34/9 \\ -17/9 \end{pmatrix},$$

donc la projection orthogonale de A sur W a pour coordonnées $(-34/9, 34/9, -17/9)$.

Exercice 9

Soit $A = (\overrightarrow{a}_1 \ldots \overrightarrow{a}_n)$ une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient $Q = (\overrightarrow{q}_1 \ldots \overrightarrow{q}_n)$ et $R = (\overrightarrow{r}_1 \ldots \overrightarrow{r}_n)$ les matrices obtenues de la factorisation QR.

a) Montrer que $\overrightarrow{a}_i = r_{1i}\overrightarrow{q}_1 + r_{2i}\overrightarrow{q}_2 + \ldots r_{ii}\overrightarrow{q}_i$. On obtient que les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de Q avec comme coefficients les composantes de R.
(**Indication** : utilisez $\overrightarrow{a}_i = Q\overrightarrow{r}_i$)

b) Trouver la factorisation QR de la matrice A ci-dessous, en utilisant le point précédant pour trouver la matrice R.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : pour trouver R on peut aussi utiliser $R = Q^T A$ mais ici vous voyez une manière alternative.

Sol.:

a) On a $A = (\overrightarrow{a}_1 \ldots \overrightarrow{a}_n) = QR = (Q\overrightarrow{r}_1 \ldots Q\overrightarrow{r}_n)$ Ainsi $\overrightarrow{a}_i = Q\overrightarrow{r_i}$. Comme la matrice R est triangulaire supérieure, on a

$$\overrightarrow{r}_i = \begin{pmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $Q\overrightarrow{r}_1 = r_{11}\overrightarrow{q}_1 + 0\overrightarrow{q}_2 + 0\overrightarrow{q}_3$ et $Q\overrightarrow{r}_2 = r_{12}\overrightarrow{q}_1 + r_{22}\overrightarrow{q}_2 + 0\overrightarrow{q}_3$. On obtient alors

$$\overrightarrow{a}_i = r_{1i}\overrightarrow{q}_1 + r_{2i}\overrightarrow{q}_2 + \ldots r_{ii}\overrightarrow{q}_i$$

b) On trouve la matrice Q en apliquant Gram-Schmidt sur les colonnes de A. On obtient

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Clairement $\overrightarrow{a}_1 = \sqrt{2}\overrightarrow{q}_1$, ainsi $r_{11} = \sqrt{2}$. Pour trouver r_{12} et r_{22} on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{12}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r_{22}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient $r_{12} = \sqrt{2}/2 = r_{22}$. On procède de la même manière pour trouver r_{13}, r_{23} et r_{33}. On a

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soit $\|.\|$ la norme euclidienne. Alors pour un vecteur $\vec{v}$, $\|c\vec{v}\| = c\,\|\vec{v}\|$ quel que soit le scalaire c. ☐ ☐

b) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 .$$

☐ ☐

c) Si un vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace W, alors $\vec{v}$ appartient à $W^\perp$. ☐ ☐

d) Soit W un sous-espace d'un espace vectoriel V. Si la dimension de l'espace $W^\perp$ est égale à 1, alors on peut trouver une base de V formée par des vecteurs de W. ☐ ☐

Sol.: Faux : a), b), c), d).

En effet, pour a) on a que $\|c\vec{v}\| = |c|\,\|\vec{v}\|$ donc pour $c = -1$ on a $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \neq -\|\vec{c}\|$.

Pour b) on trouve un contre-exemple : Avec $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ on a $\|u\| = 1 = \|v\|$, $u+v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\|u+v\| = \sqrt{2}$. Ainsi $2 = \|u+v\|^2 \neq \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = 1+2+1 = 4$.

Pour c) prenons $W = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ avec e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. En prenant $v = e_2$ on a bien que $v \perp e_1$ mais $v \not\perp e_2$.

Pour d), prenons $V = \mathbb{R}^2$ et $W = \mathrm{span}\{e_1\}$. On a que $W^\perp = \mathrm{span}\{e_2\}$ et $\dim W = \dim W^\perp = 1$ mais W ne peut pas contenir une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale. ☐ ☐

b) Un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre. ☐ ☐

c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général. ☐ ☐

d) Si $\vec{x}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $\vec{x} - \vec{p}_W(\vec{x})$ n'est pas nul (ici $\vec{p}_W(\vec{x})$ désigne la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur W. ☐ ☐

Sol.: Vrai : b), c), d). Faux : a).

a) Faux, il manque la condition que les vecteurs de base doivent être de norme égale à 1.

b) Vrai. En effet, soient $u, v \neq 0$ et montrons que si u est orthogonal à v alors les vecteurs u et v sont linéairement indépendants. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0$ et supposons que $< u, v >= 0$. On a que $< \lambda u + \mu v, v >= 0$ et donc, par les propriétés du produit scalaire on trouve $\lambda < u, v > +\mu < v, v >= 0$. Comme $< u, v >= 0$ par hypothèse on trouve que $\mu < v, v >= 0$ et puisque $v \neq 0$ on a que $< v, v >\neq 0$ donc $\mu = 0$. De même on trouve que $\lambda = 0$ et donc u et v sont linéairement indépendants.

c) Vrai, par définition toute base orthonormale est formée de vecteurs orthogonaux. Par contre la base $\{2e_1, 2e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est orthogonale mais pas orthonormale.

d) Vrai. Si $\overrightarrow{x} \notin W$, alors $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x})$ car $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x}) \in W$ par définition et donc $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x}) \neq 0$.

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\overrightarrow{v}$ est dans W et dans $W^\perp$, alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

c) Si U est une matrice $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension p $(0 < p \leqslant n)$, alors la méthode de Gram-Schmidt produit, à partir d'une base $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_p\}$ de W, une base $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_p\}$ avec $\|\overrightarrow{v}_i\| = 1, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$.

Sol.: Vrai : b), c), d). Faux : a).

a) Faux. Tout sous-ensemble (fini) de $\mathbb{R}^n$ dont les éléments sont orthonormés est linéairement indépendant. En effet, soit $S = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_r}\}$ un tel ensemble et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_r \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{0}$. En faisant le produit scalaire avec $\overrightarrow{v}_i$ (pour $i = 1, \ldots, r$) on trouve $\lambda_i < \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_i} >= 0$ et comme $\|\overrightarrow{v_i}\| = 1$ on obtient que $\lambda_i = 0$.

b) Vrai. Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{v} \in W \cap W^\perp$. Alors, par définition, on a que $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} >= 0$ ce qui entraîne que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

c) Vrai. Soit U est une matrice $m \times n$ avec des colonnes orthonormales. Notons $\overrightarrow{c}_i \in \mathbb{R}^m$ sa i-ème colonne de sorte que $< \overrightarrow{c_i}, \overrightarrow{c_j} >= \delta_{ij}$ où $\delta_i j = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_i j = 1$ si $i = j$. Calculons le coefficient i, j de la matrice $U^T U$. On a que, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$

$$(U^T U)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} (U^T)_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^{m} U_{k,i} U_{k,j}$$

Or cette dernière expression est égale à $< \overrightarrow{c_i}, \overrightarrow{c_j} >$ et l'hypothèse implique donc que $U^T U = I_n$ (la matrice identité $n \times n$) et donc $U^T U \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Vrai. La méthode de Gram-Schmidt produit, à partir d'une base $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_p\}$ de W, une base $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_p\}$ orthonormée de W donc en particulier $\|\overrightarrow{v}_i\| = 1, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 13

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q\}$ une base orthogonale de W. Soit $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^\perp$.

Montrer que $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q,\ \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ est orthogonale et prouver la relation

$$\mathrm{dim} W + \mathrm{dim} W^{\perp} = n.$$

Sol.: Le vecteur $\overrightarrow{w}_i$ et le vecteur $\overrightarrow{v}_j$ sont orthogonaux pour tous $i = 1 \ldots q,\ j = 1 \ldots r$ car ils appartiennent aux espaces orthogonaux W et $W^{\perp}$. Les vecteurs $\overrightarrow{w}_i$ sont orthogonaux entre eux car ils constituent une base orthogonale, de même pour les vecteurs $\overrightarrow{v}_j$. Ainsi, n'importe quels deux vecteurs dans la famille $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q,\ \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ sont orthogonaux : c'est une famille orthogonale.

Montrons la relation $\mathrm{dim} W + \mathrm{dim} W^{\perp} = n$.
Méthode 1 : La famille $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q,\ \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ est orthogonale donc linéairement indépendante. De plus tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ se décompose sous la forme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{z} \in W^{\perp}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v}) \in W$. Or $\overrightarrow{z} \in W^{\perp}$ peut être décomposé dans la base $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ de $W^{\perp}$ et $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v}) \in W$ peut être décomposé dans la base $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q\}$ de W. Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ peut se décomposer selon la famille linéairement indépendante $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q,\ \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ qui est donc une base de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent $q + r = n$.

Méthode 2 : Appliquons le théorème du rang à l'application linéaire projection $\overrightarrow{p}_W$:

$$\dim \mathrm{Im}\, \overrightarrow{p}_W + \dim \mathrm{Ker}\, \overrightarrow{p}_W = n.$$

Or la projection vérifie $\mathrm{Ker}\, \overrightarrow{p}_W = W^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\, \overrightarrow{p}_W = W$, d'où le résultat.

Exercice 14

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$ une base orthogonale de U. On considère la transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(\overrightarrow{v}) = \mathrm{proj_U}(\overrightarrow{v})$. Montrer que T est une transformation linéaire.

Indication : utiliser la définition de la projection orthogonale.

Sol.: **Méthode 1 :**

$$T(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \frac{(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\overrightarrow{u}_1 + \ldots + \frac{(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u}_p}{\overrightarrow{u}_p \cdot \overrightarrow{u}_p}\overrightarrow{u}_p$$

$$= \alpha\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\overrightarrow{u}_1 + \beta\frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\overrightarrow{u}_1 + \ldots + \alpha\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_p}{\overrightarrow{u}_p \cdot \overrightarrow{u}_p}\overrightarrow{u}_p + \beta\frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}_p}{\overrightarrow{u}_p \cdot \overrightarrow{u}_p}\overrightarrow{u}_p = \alpha\overrightarrow{T}(\overrightarrow{v}) + \beta\overrightarrow{T}(\overrightarrow{w}).$$

Méthode 2 : En utilisant l'identité $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}^T\overrightarrow{x}$, on a

$$T(\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\overrightarrow{u}_1 + \ldots + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_p}{\overrightarrow{u}_p \cdot \overrightarrow{u}_p}\overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{u}_1\overrightarrow{u}_1^T(\overrightarrow{u}_1^T\overrightarrow{u}_1)^{-1}\overrightarrow{v} + \ldots + \overrightarrow{u}_p\overrightarrow{u}_p^T(\overrightarrow{u}_p^T\overrightarrow{u}_p)^{-1}\overrightarrow{v}$$

$$= \left(\overrightarrow{u}_1\overrightarrow{u}_1^T(\overrightarrow{u}_1^T\overrightarrow{u}_1)^{-1} + \ldots + \overrightarrow{u}_p\overrightarrow{u}_p^T(\overrightarrow{u}_p^T\overrightarrow{u}_p)^{-1}\right)\overrightarrow{v}.$$

Ainsi, la transformation T est associée à la matrice de taille $n \times n$ définie par $\overrightarrow{u}_1\overrightarrow{u}_1^T(\overrightarrow{u}_1^T\overrightarrow{u}_1)^{-1} + \ldots + \overrightarrow{u}_p\overrightarrow{u}_p^T(\overrightarrow{u}_p^T\overrightarrow{u}_p)^{-1}$ et est donc linéaire.

Exercice 15

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\text{Ker}A = \text{Ker}(A^T A)$.
b) Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Sol.:

a) Si $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, alors $A^T A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre $\text{Ker}A \subset \text{Ker}(A^T A)$. Soit maintenant $\overrightarrow{x}$ tel que $A^T A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{x}^T A^T A\overrightarrow{x} = 0$. Or, $\overrightarrow{x}^T A^T A\overrightarrow{x} = (A\overrightarrow{x})^T(A\overrightarrow{x}) = \|A\overrightarrow{x}\|^2$. Ainsi, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, et $\text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}A$. D'où l'égalité.
b) Les colonnes de $A = (\overrightarrow{a}_1 \ldots \overrightarrow{a}_n)$ sont linéairement indépendantes

$\iff \left(\beta_1\overrightarrow{a}_1 + \ldots + \beta_n\overrightarrow{a}_n = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0\right)$

$$\iff \left(A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \overrightarrow{0}\right)$$

$\iff \text{Ker}A = \{\overrightarrow{0}\}$.

Ainsi, d'après a), les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si $\text{Ker}(A^T A) = \{\overrightarrow{0}\}$, c'est-à-dire la matrice (carrée) $A^T A$ est inversible.

Exercice 16

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.
b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.
c) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($\|\overrightarrow{u}\| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$ est orthogonale.
d) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.
e) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Sol.:

a) Par définition, une matrice orthogonale Q de taille $n \times n$ vérifie $Q^T Q = I_n$ et $QQ^T = I_n$. Comme $Q = (Q^T)^T$, on a $Q^T(Q^T)^T = I_n$ et $(Q^T)^T Q^T = I_n$, ce qui montre que Q^T est aussi orthogonale.
b) En utilisant $VV^T = UU^T = I_n$, on a $UV\,(UV)^T = UVV^T U^T = UU^T = I_n$. De même, on peut vérifier que $(UV)^T\,UV = I_n$, donc UV est une matrice orthogonale.
c) On doit montrer $Q^T Q = I_n$.
Méthode 1 : En travaillant avec des indices, on a

$$\begin{aligned}\left(Q^T Q\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} q_{ki}q_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ki} - 2u_k u_i)(\delta_{kj} - 2u_k u_j)\\ &= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n}(-\delta_{ki}2u_k u_j - 2\delta_{kj}u_k u_i + 4u_i u_j u_k^2),\end{aligned}$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon. En utilisant $\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$, on obtient $Q^T Q = I_n$.
Méthode 2 : On calcule matriciellement : $Q^T = (I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)^T = I_n - 2(\overrightarrow{u}^T)^T\overrightarrow{u}^T = Q$, ensuite,

$$Q^T Q = (I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)(I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T) = I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T + 4\overrightarrow{u}\,(\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{u}^T = I_n - 4\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T + 4\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T = I_n,$$

où l'on a utilisé $\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 = 1$.
Remarque : de telles matrices orthogonales s'appellent réflexions de Householder.

d) La matrice orthogonale conserve la norme de tout vecteur $\overrightarrow{x}$: $\|Q\overrightarrow{x}\|^2 = (Q\overrightarrow{x})^T(Q\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^T Q^T Q\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{x}\|^2$. Ensuite, si $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ est un vecteur propre associé à λ, on a $\|\overrightarrow{x}\| = \|Q\overrightarrow{x}\| = \|\lambda\overrightarrow{x}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{x}\|$. Comme $\|\overrightarrow{x}\| \neq 0$, on obtient $|\lambda| = 1$, ainsi $\lambda = \pm 1$.

e) On calcule pour tous i, j :

$$Q\overrightarrow{u}_i \cdot Q\overrightarrow{u}_j = (Q\overrightarrow{u}_i)^T Q\overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i^T Q^T Q\overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i^T\overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j.$$

Comme les $\overrightarrow{u}_i$ sont orthogonaux entre eux, ceci montre que la famille $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls (de normes $\|Q\overrightarrow{u}_i\| = \|\overrightarrow{u}_i\|$).

Il reste à montrer que $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est une base.
Méthode 1 : Comme Q est inversible (d'inverse Q^T), Q transforme les bases en bases, donc $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est une base.
Méthode 2 : Comme la famille $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est automatiquement linéairement indépendante. Comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.
Remarque : si $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ est une base orthonormée, alors $\|Q\overrightarrow{u}_i\| = 1$, et $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est aussi une base orthonormée.

Exercice 17

i) Soit $\{u_1, ..., u_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et v un vecteur dans $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 = |v \cdot u_1|^2 + ... + |v \cdot u_n|^2 .$$

ii) (Inégalité de Bessel) Soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une famille orthonorméee dans $\mathbb{R}^n$ et soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 \geq |v \cdot u_1|^2 + ... + |v \cdot u_p|^2 .$$

Sol.:

i) Soit U la matrice orthogonale formée des colonnes u_i. En utilisant $UU^T = I$, on obtient

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \left\langle v, UU^T v\right\rangle = \left\langle U^T v, U^T v\right\rangle = \left\|U^T v\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} u_1 \cdot v \\ \vdots \\ u_n \cdot v \end{pmatrix}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i \cdot v|^2 .$$

ii) On considère la projection $w = \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, v\rangle\, u_i$ de v sur $W = \operatorname{span}\{u_1, ..., u_p\}$. On a la décomposition $v = w + z$, avec $z \in W^{\perp}$. Par le théorème de Pythagore, w et z étant orthogonaux, on obtient

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

(En effet, on a $\|v\|^2 = \langle w+z, w+z\rangle = \|w\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle w, z\rangle$ et $\langle w, z\rangle = 0$).
Ensuite,

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2 \geqslant \|w\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{p}\langle u_i, v\rangle\, u_i\right\|^2 &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\langle u_i, v\rangle\langle u_j, v\rangle\, u_i^T u_j \\
&= \sum_{i=1}^{p}|\langle u_i, v\rangle|^2 \underbrace{\|u_i\|^2}_{=1 \text{ (norm.)}} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\langle u_i, v\rangle\langle u_j, v\rangle \underbrace{u_i^T u_j}_{=0 \text{ (orth.)}} \\
&= \sum_{i=1}^{p}|\langle u_i, v\rangle|^2
\end{aligned}
$$

Exercice 18

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel muni d'une base orthogonale, et $\operatorname{proj} W$ la projection orthogonale associée. Montrer (sans utiliser la représentation de $\operatorname{proj} W$ à l'aide d'une matrice) que

1. $\vec{v} \mapsto \operatorname{proj} W(\vec{v})$ est linéaire.
2. $\operatorname{proj} W(\vec{v}) = \vec{v}$ si et seulement si $\vec{v} \in W$.
3. $\operatorname{proj} W \circ \operatorname{proj} W = \operatorname{proj} W$.

Sol.: Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k)$ la base orthonormée de W.

1. Rappelons que pour un $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ quelconque,
$$\operatorname{proj} W(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1 + \cdots + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_k}{\vec{v}_k\cdot\vec{v}_k}\vec{v}_k\,. \tag{1}$$
On remarque que chaque terme est linéaire en $\vec{v}$, puisque par les propriétés du produit scalaire,
$$\frac{(\lambda\vec{v} + \mu\vec{u})\cdot\vec{v}_j}{\vec{v}_j\cdot\vec{v}_j}\vec{v}_j = \lambda\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_j}{\vec{v}_j\cdot\vec{v}_j}\vec{v}_j + \mu\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_j}{\vec{v}_j\cdot\vec{v}_j}\vec{v}_j\,.$$
L'application $\vec{v} \mapsto \operatorname{proj} W(\vec{v})$ étant une somme de termes linéaires, elle est aussi linéaire.
2. Par (**??**), on voit que si $\operatorname{proj} W(\vec{v}) = \vec{v}$, alors $\vec{v} \in \operatorname{Vect}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = W$. Inversément, si $\vec{v} \in W$, un théorème vu au cours garantit que, la base de W étant orthogonale, $\vec{v}$ s'exprime comme
$$\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1 + \cdots + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_k}{\vec{v}_k\cdot\vec{v}_k}\vec{v}_k \equiv \operatorname{proj} W(\vec{v})\,.$$
3. Pour simplifier, supposons que W est engendré par un seul vecteur : $W = \operatorname{Vect}\{\vec{w}\}$. Dans ce cas,
$$\operatorname{proj} W(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}\,.$$
On a donc
$$
\begin{aligned}
\operatorname{proj} W(\operatorname{proj} W(\vec{v})) = \frac{\operatorname{proj} W(\vec{v})\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} &= \frac{(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w})\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} \\
&= \frac{\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}(\vec{w}\cdot\vec{w})}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} = \operatorname{proj} W(\vec{v})\,.
\end{aligned}
$$
De par la linéarité du produit scalaire, on étend facilement ce calcul au cas où la base de W contient plus qu'un vecteur.